Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSIINF-UPM

Funciones, límites y continuidad - Entrega 7

Continuidad

Apellidos:
Nombre:

Ejercicio 1. Consideramos las siguientes funciones extendidas a todo $\mathbb{R}$, tomando el valor cero fuera del dominio. Calcula los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y señala las discontinuidades que sean evitables.

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \ln(1-x).$

Ejercicio 2. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos que se indican.

Nota:

i) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+a}$ en todo $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+a(x-2))}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{4} & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2ax^2(x^2+4))}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ (a^2+3)\ln(e+x^2) & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Ejercicio 3. Estudia la continuidad de la función

Nota:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = e^x - 3x$, demuestra que al menos existe un valor a tal que $f(a) = 0$.

Nota: /1.5

Ejercicio 5. Cuestiones. Siendo $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

Nota:

i) Sea $f(x)$ una función periódica en $\mathbb{R}$ con periodo T. Si $f(x)$ es continua en $[0, T]$ entonces $f(x)$ está acotada en $\mathbb{R}$. ☐ Si ☐ No

ii) La función $f(x) = \dfrac{x-8}{x^2 - 7x + 6}$ alcanza máximo absoluto en $[2, 5]$. ☐ Si ☐ No

iii) La ecuación $3^x = 2$ tiene una solución en $[0, 1]$. ☐ Si ☐ No

iv) La ecuación $\cos^2 x = 2 - x^4$ tiene solución en $[0, 2\pi]$. ☐ Si ☐ No

v) Sea $f : [0, 5] \to [0, 10]$ una función continua en $[0, 5]$. Existe $c \in [0, 5]$ tal que $f(c) = 2c$. ☐ Si ☐ No

vi) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Entonces, existe un número $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ☐ Si ☐ No